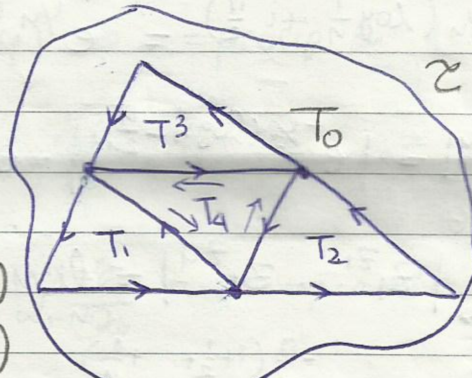
ΘΕΩΡΗΜΑ (GOURSAT)

$f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε $\forall$ τριγωνική καμπύλη Γ που μαζί με το εσωτερικό της ανήκει στον $\mathcal{T}$, ισχύει

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = 0$$



Αποδ.

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

$d_1 = \frac{d_0}{2}$ (d_1: διαμ. του μικρού τριγώνου)

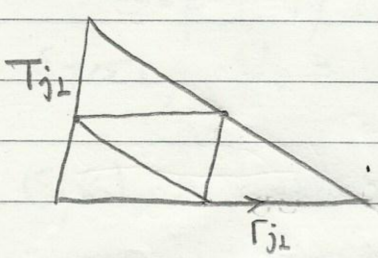
$p_1 = \frac{p_0}{2}$ (p_1: μήκος της περιμέτρου του)

Τότε, $I = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} f(w)\,dw = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_j} f(w)\,dw$

Γ_{j1}: ένα από τα Γ_j

$|I| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\Gamma_j} f(w)\,dw \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_{j1}} f(w)\,dw \right|$, $\forall j$

Τώρα στο τρίγωνο καμπύλης Γ_{j1} κάναμε ξανά την ίδια διαδικασία



Τότε $\left| \int_{\Gamma_j} f(w)\,dw \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_{j2}} f(w)\,dw \right|$

όπου τώρα $d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$, $p_2 = \frac{p_0}{2^2}$

Άρα, $|I| \leq 4^2 \left| \int_{\Gamma_{j2}} f(w)\,dw \right|$

όμοια συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία n φορές ώστε

$\dots T_{jn} \subseteq T_{jn-1} \subseteq \dots \subseteq T_{j2} \subseteq T_{j1} \subseteq T_{j0}$ φθίνουσα ακολουθία

$|I| \leq 4^{\nu} \left| \int_{\Gamma_{j\nu}} f(w)\,dw \right|$ και $d_n = \frac{d_0}{2^n}$ & $p_n = \frac{p_0}{2^n}$

T_{jn} συμπαγή και όπως $\{z_0\} = \bigcap T_{jn} \neq \emptyset$ και $d_n = \frac{d_0}{2^n} \to 0$

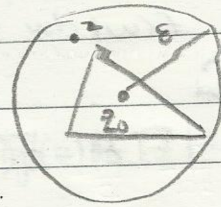
f όμως είναι ολόμορφη τότε:

$\exists f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \iff$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ |z-z_0|<\delta \overset{z\neq z_0}{\Rightarrow} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \leq \varepsilon |z-z_0| \quad \forall z \in B(z_0,\delta)$

$diam(T_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow (\exists \nu_0)(\forall \nu \geq \nu_0) : diam(T_n) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup_{z\in T_n} |z_0 - z| < \delta$



Αλλά, $\forall z \in T_n : |z_0 - z| \leq \sup_{z\in T_n} |z_0 - z| < \delta$

καθώς, $z \in B(z_0,\delta)$.

$$\int_{\Gamma_{j_n}} (f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0))dz = 0$$

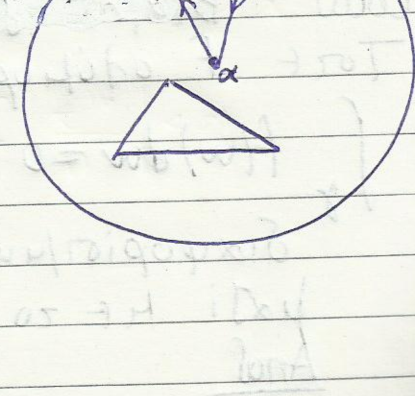
Έτσι, $\left|\int_{\Gamma_{j_n}} f(w)\,dw\right| = \left|\int_{\Gamma_{j_n}} (f(w)-f(z_0)-f'(z_0)(w-z_0))dw\right| \leq$

$\leq \int_{\Gamma_{j_n}} |f(w)-f(z_0)-f'(z_0)(w-z_0)|\,dw \leq \varepsilon \left|\int_{\Gamma_{j_n}} |w-z_0|\,dw\right| \leq$

$\leq \varepsilon \cdot \frac{d_0}{2^n} \cdot \frac{p_0}{2^n} = \varepsilon \frac{d_0 p_0}{4^n}$

Αλλά,
$$|I| \leq 4\left|\int_{\Gamma_{j_n}} f(w)dw\right| \leq \cancel{4^\nu}\varepsilon \frac{d_0 p_0}{\cancel{4^\nu}} = \varepsilon d_0 p_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow I = 0$



ΘΕΩΡΗΜΑ (Morera)

Έστω $f : B(a,p) \to \mathbb{C}$ συνεχής

$\int_\Gamma f(w)\,dw = 0 \quad \forall \Gamma$ στο $B(\alpha,p)$

Τότε $\exists F : B(a,p) \to \mathbb{C}$ τω

$\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$

Αποδειξη

$$\int_{\widehat{\alpha z}} f(w)\,dw = F(z)$$

τοτε εξ υποθεσεως $\forall z, z_0 \in B(a,\rho)$

$$\int_{\widehat{\alpha z_0 z_0 \alpha}} f(w)\,dw = \int_{\widehat{\alpha z_0}} f + \int_{\widehat{z_0 z}} f + \int_{\widehat{z\alpha}} f = F(z_0) + \int_{\widehat{z_0 z}} f - F(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(z) - F(z_0) = \int_{\widehat{z_0 z}} f(w)\,dw$$

$z \neq z_0$ παραμετρικη μορφη του ευθ. τμημ. $\widehat{z_0 z}$

$w = w(t) = z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0,1]$

Υπολογιζουμε

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = f(z_0) \to F'(z_0) = f(z_0)$$

Θεωρημα (Γενικευση του Morera)

Εστω οτι ισχυουν οι υποθεσεις του Θεωρ. Morera αλλα για (γ) κατα τμηματα διαφορισιμη & κλειστη. Τοτε $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ (και αντιστροφα)

Θεωρημα (Γενικο Θεωρημα Cauchy)

Εστω $B(a,r)$ δισκος και $f: B(a,r) \to \mathbb{C}$ συνεχης

Τοτε f ολομορφη αν. ν

$$\int_\gamma f(w)\,dw = 0$$ ισχυει για καθε κατα τμηματα διαφορισιμη κλειστη καμπυλη (γ) οπου μαζι με το εσωτερικο της ανηκει στο δισκο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω $f: B(a,r) \to \mathbb{C}$ τοτε f λεγεται τοπικά φραγμενη στο α, αν $(\exists M>0)$ και $V_a \subseteq B(\alpha,r)$ του α τω $|f(z)| \leq M$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο $B(a,r)$
Αν $\exists \lim_{z \to a} f(z) \Rightarrow f$ τοπ. φραγμ στο α
Απόδ

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0): 0<|z-a|<\delta \Rightarrow |g(z)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow |g(z)|-|\ell|<\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |g(z)| < |\ell|+\varepsilon := M \quad , \forall z \in B_0(\alpha,\delta)$
$|g(z)| \leq \max\{M, |f(a)|\} = M \quad , \forall z \in B(a,\delta)$